

Одноосный вибрационный гироскоп

Д. И. БУГРОВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

e-mail: bugrov@moids.math.msu.su, dima-bugrov@yandex.ru

УДК 531.383

Ключевые слова: одноосный вибрационный гироскоп, кориолисово ускорение, измерение угловой скорости.

Аннотация

В статье излагаются принципы работы одноосного вибрационного микрогироскопа. Приведена математическая модель одномассового устройства, описаны различные режимы его работы, указаны соотношения, связывающие подлежащую измерению величину (угол поворота или соответствующую проекцию угловой скорости) с обобщёнными координатами чувствительной массы. Подробно рассмотрены различные режимы функционирования прибора: один режим вынужденных колебаний (для измерения угловой скорости) и два режима собственных колебаний (для измерения угла поворота и для измерения угловой скорости). Предложена методика для идентификации параметров неравножёсткости подвеса чувствительной массы.

Abstract

D. I. Bugrov, Single-axis vibratory gyroscope, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 8, pp. 149–163.

The paper deals with the principles of single-axis vibratory gyroscope operation. A mathematical model for single-mass vibratory gyroscope and some modes of its operations are considered, relations between measured values (angle of rotation or angular rate) and sensitive mass generalized coordinates are described. Some details for the forced oscillations mode used in measuring of the angular rate and for two modes of natural oscillations used in measuring of rotational angle and angular rate are described. New method for identification of anisoelasticity in single-axis vibratory gyroscope is suggested.

Принцип работы вибрационных гироскопов основан на измерении кориолисова ускорения. Возможно, впервые этот принцип был использован Фуко [16] (1851 г.) для доказательства вращения Земли. Первым вибрационным гироскопом принято считать *гиротрон*, разработанный в начале 50-х годов прошлого века [15]. В 1960-е и 1970-е годы было запатентовано значительное число аналогичных (т. е. основанных на измерении кориолисова ускорения) устройств, не получивших, однако, широкого распространения. Современный уровень развития технологий позволяет производить вибрационные гироскопы, сочетающие малые размеры и низкую стоимость с приемлемой точностью определения угловой скорости [14].

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 8, с. 149–163.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

1. В качестве одноосного вибрационного гироскопа будем рассматривать механическую модель, предложенную в [24]: чувствительная масса — материальная точка массы m , совершающая колебания в плоскости Oxy под действием упругих сил F_{upx} , F_{upy} , действующих в направлениях осей Ox и Oy соответственно, сил вязкого трения F_{vx} , F_{vy} , а также внешней вынуждающей силы $F = (F_x, F_y)$, действующей в плоскости Oxy . Ось Oz дополняет систему координат $Oxyz$ до правой. Жёстко связанная с гироскопом система координат $Oxyz$ вращается относительно инерциальной системы $M\xi\eta\zeta$ с абсолютной угловой скоростью $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, а абсолютное линейное ускорение точки O равно $W = (W_x, W_y, W_z)$ (оба вектора заданы своими проекциями на оси системы $Oxyz$). Начало координат — точка O — соответствует положению равновесия чувствительной массы в случае $F(t) \equiv 0$, $W(t) = \Omega(t) \equiv 0$. Считая упругие силы пропорциональными смещениям,

$$F_{upx} = k_{xx}x + k_{xy}y, \quad F_{upy} = k_{xy}x + k_{yy}y,$$

а силы вязкого трения пропорциональными скоростям смещений чувствительной массы,

$$F_{vx} = r_x \dot{x}, \quad F_{vy} = r_y \dot{y},$$

получаем уравнения движения чувствительной массы

$$\begin{aligned} \ddot{x} + W_x + \frac{r_x}{m} \dot{x} + \left(\frac{k_{xx}}{m} - \Omega_y^2 - \Omega_z^2 \right) x + k_{xy}y + \Omega_x \Omega_y y - \dot{\Omega}_z y - 2\Omega_z \dot{y} &= \frac{F_x}{m}, \\ \ddot{y} + \frac{r_y}{m} \dot{y} + W_y + \left(\frac{k_{yy}}{m} - \Omega_x^2 - \Omega_z^2 \right) y + k_{xy}x + \Omega_x \Omega_y x + \dot{\Omega}_z x + 2\Omega_z \dot{x} &= \frac{F_y}{m}. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим случай равножёсткого подвеса чувствительной массы:

$$k_{xx} = k_{yy} = k > 0, \quad k_{xy} = 0.$$

Пусть

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2, \quad \frac{r_x}{m} = \frac{r_y}{m} = \varepsilon \geq 0, \quad \Omega_x = \Omega_y = W_x = W_y \equiv 0.$$

Тогда точки M и O совпадают, положение системы $Oxyz$ относительно системы $O\xi\eta\zeta$ определяется углом $\varphi(t)$, при этом $\dot{\varphi}(t) = \Omega_z(t)$ (рис. 1) и уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + (\omega_n^2 - \Omega_z^2)x - \dot{\Omega}_z y - 2\Omega_z \dot{y} &= \frac{F_x}{m}, \\ \ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + (\omega_n^2 - \Omega_z^2)y + \dot{\Omega}_z x + 2\Omega_z \dot{x} &= \frac{F_y}{m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Конструкция вибрационного гироскопа позволяет получать информацию о текущих значениях x , y , \dot{x} , \dot{y} . На основании этой информации вибрационный гироскоп может измерять либо угловую скорость Ω_z , либо угол поворота основания $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \Omega_z(\tau) d\tau$.

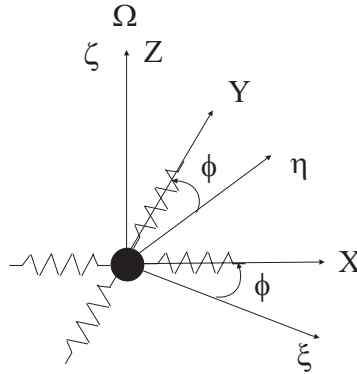


Рис. 1

2. Режим измерения постоянной угловой скорости. В этом случае входящая в уравнения (2) угловая скорость считается постоянной, $\Omega_z(t) \approx \text{const}$. Поскольку уравнения (2) линейны, их решение представляется в виде суммы однородного и частного решений, причём решение однородной системы экспоненциально стремится к нулю в случае $\omega_n > \Omega_z$, $\varepsilon > 0$. Пусть вынуждающая сила $F(t)/m$ периодическая: $F_x = 0$, $F_y/m = f \sin(\omega t + \varphi_1)$. В этом случае частное решение системы (2) (при указанных выше предположениях) ищем в виде вынужденных колебаний с частотой вынуждающей силы ω , а так как $\varepsilon \neq 0$, то $i\omega$ не является корнем характеристического уравнения для (2) и резонанс не наступает. Поэтому частное решение уравнений (2) ищем в виде

$$x_p = A \cos(\omega t + \varphi_3), \quad y_p = C \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (3)$$

Пусть φ_1 таково, что $\varphi_2 = 0$. Тогда [18]

$$A = \frac{2\Omega_z C \omega}{\sqrt{(\omega^2 + \Omega_z^2 - \omega_n^2)^2 + \varepsilon^2 \omega^2}}, \quad \varphi_3 = \text{tg}^{-1} \frac{\omega_n^2 - \omega^2 - \Omega_z^2}{\varepsilon \omega}. \quad (4)$$

Выбирая частоту вынуждающей силы $\omega = \omega_n$, для случая $\Omega_z^2 \ll \varepsilon \omega_n$ получаем [18]

$$\frac{x_p}{C} \approx \frac{2\Omega_z}{\varepsilon}, \quad \varphi_3 \approx 0, \quad (5)$$

т. е. отношение амплитуд колебаний по осям Ox и Oy пропорционально угловой скорости вращения основания вибрационного гироскопа.

В [18] указано, что описанная выше модель оказывается чувствительной к малым вариациям параметров системы. Там же предлагается изменить схему устройства, добавив дополнительную рамку для уменьшения указанной чувствительности. В [10] изучается вопрос о влиянии линейных ускорений основания на погрешности определения угловой скорости виброгироскопа с такой дополнительной рамкой. Для ослабления такого влияния можно объединить

в один блок пару чувствительных масс, колеблющихся в противофазе [12]. Вибрационные микрогирископы, реализующие подобную схему, в настоящее время серийно изготавливаются, например, фирмой «Analog Devices» [25].

Также имеется возможность измерять угловую скорость при помощи роторного (дискового) микромеханического гироскопа. Его чувствительным элементом является диск, совершающий угловые колебания вокруг своей оси. В такой конструкции амплитуда колебаний по выходной оси гироскопа пропорциональна угловой скорости основания (подробнее см. [5, 11]).

3. Режим измерения угла поворота. В этом случае угловая скорость также полагается постоянной, $\Omega(t) \approx \text{const}$, при этом в отличие от предыдущего случая трением пренебрегают, $\varepsilon = 0$, и вынуждающая сила отсутствует, $F(t) \equiv 0$. Таким образом, изучаются только собственные колебания. Кроме того, считается, что $\Omega_z^2 \ll \omega_n^2$. При указанных предположениях уравнения (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_n^2 x - 2\Omega_z \dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_n^2 y + 2\Omega_z \dot{x} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Легко проверить, что если $\Omega_z = 0$, то решение уравнений (6) представляется как [20]

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \cos \theta - b \sin \varphi \sin \theta, \\ y &= a \sin \varphi \cos \theta + b \cos \varphi \sin \theta, \\ \dot{x} &= -\omega_n a \cos \varphi \sin \theta - \omega_n b \sin \varphi \cos \theta, \\ \dot{y} &= -\omega_n a \sin \varphi \sin \theta + \omega_n b \cos \varphi \cos \theta, \\ \theta &= \omega_n t + \gamma_0. \end{aligned} \quad (7)$$

На плоскости Oxy соотношения (7) задают эллипс с полуосями a и b , угол φ задаёт ориентацию эллипса, угол γ_0 определяется начальными условиями для уравнений (6). Из (7) нетрудно получить, что

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{2(\omega_n^2 xy + \dot{x}\dot{y})}{\omega_n^2(x^2 - y^2) + (\dot{x}^2 - \dot{y}^2)}. \quad (8)$$

В [7] показано, что при $\Omega_z \neq 0$ соотношение (7) можно рассматривать как замену переменных $\{x, y, \dot{x}, \dot{y}\} \rightarrow \{a, b, \varphi, \gamma_0\}$, причём при малых амплитудах колебаний (и наличии дополнительных стабилизирующих сигналов в правых частях уравнений (6)) величины a , b , φ и γ_0 являются медленно меняющимися, так что равенство (8) выполняется, что и позволяет определять изменение угла φ , т. е. измерять угол поворота основания гироскопа относительно начального положения.

Влияние различного рода погрешностей и способы их компенсации для вибрационных гироскопов указанного типа обсуждаются в [7, 17, 20, 23].

4. Режим измерения нестационарной угловой скорости. Возможен и другой подход к задаче определения угловой скорости основания — на основе анализа собственных, а не вынужденных (как в пункте 1) колебаний чувствительной массы. Во-первых, можно вычислять угловую скорость через приращения

измеренного в соответствии с пунктом 2 угла поворота. Во-вторых, можно строить дополнительные стабилизирующие сигналы (обеспечивающие устойчивость формы колебаний чувствительной массы) в правых частях уравнений (6) специального вида, при этом сигнал в одном из контуров управления оказывается пропорциональным искомой угловой скорости основания виброгироскопа [9]. Возможен и третий подход, основанный на получении явного вида решения уравнений (2) при $\varepsilon = 0$ (т. е. при отсутствии трения) и $F(t) \equiv 0$ (режим собственных колебаний) [3]. Уравнения (2) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\omega_n^2 - \Omega_z^2)x - \dot{\Omega}_z y - 2\Omega_z \dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + (\omega_n^2 - \Omega_z^2)y + \dot{\Omega}_z x + 2\Omega_z \dot{x} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть ориентация связанной с гироскопом системы координат $Oxyz$ относительно инерциальной $O\xi\eta\zeta$ задаётся ортогональной матрицей $\Phi(t)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) & 0 \\ -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ уравнения движения чувствительной массы примут вид

$$m\ddot{\xi} = F_\xi, \quad m\ddot{\eta} = F_\eta, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} F_\xi &= \cos \varphi F_x - \sin \varphi F_y, & F_x &= -kx, \\ F_\eta &= \sin \varphi F_x + \cos \varphi F_y, & F_y &= -ky. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя в (11) соотношения (10), (12), получаем

$$m\ddot{\xi} = -k\xi, \quad m\ddot{\eta} = -k\eta, \quad (13)$$

т. е. уравнения (9) являются приводимыми (подробнее о приводимых уравнениях см. [13]).

Получаем известный [6] результат: движение чувствительной массы вибрационного гироскопа в инерциальных координатах не зависит от вида $\Omega_z(t)$ (и $\varphi(t)$) и представляет собой колебания с частотой $\omega_n = \sqrt{k/m}$, амплитуда которых определяется только начальными условиями:

$$\begin{aligned} \xi &= C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t, \\ \eta &= C_3 \sin \omega_n t + C_4 \cos \omega_n t. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя в (10) соотношения (14), получаем

$$\begin{aligned} x &= C_1 \sin \omega_n t \cos \varphi + C_2 \cos \omega_n t \cos \varphi + C_3 \sin \omega_n t \sin \varphi + C_4 \cos \omega_n t \sin \varphi, \\ y &= -C_1 \sin \omega_n t \sin \varphi - C_2 \cos \omega_n t \sin \varphi + C_3 \sin \omega_n t \cos \varphi + C_4 \cos \omega_n t \cos \varphi, \end{aligned} \quad (15)$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{C_1 + C_4}{2} \sin(\omega_n t + \varphi(t)) + \frac{C_1 - C_4}{2} \sin(\omega_n t - \varphi(t)) + \\
&+ \frac{C_2 - C_3}{2} \cos(\omega_n t + \varphi(t)) + \frac{C_2 + C_3}{2} \cos(\omega_n t - \varphi(t)), \\
y &= \frac{-C_2 + C_3}{2} \sin(\omega_n t + \varphi(t)) + \frac{C_2 + C_3}{2} \sin(\omega_n t - \varphi(t)) + \\
&+ \frac{C_1 + C_4}{2} \cos(\omega_n t + \varphi(t)) + \frac{-C_1 + C_4}{2} \cos(\omega_n t - \varphi(t)),
\end{aligned} \tag{16}$$

т. е. собственные колебания чувствительной массы вибрационного гироскопа в связанной системе координат $Oxyz$ представляют собой комбинацию синусов и косинусов от суммы $\omega_n t + \varphi(t)$ и разности $\omega_n t - \varphi(t)$.

Окончательно получаем уравнения движения чувствительной массы в виде

$$\begin{aligned}
x &= A \sin(\omega_n t + \varphi(t)) + B \cos(\omega_n t + \varphi(t)) + \\
&+ D \sin(\omega_n t - \varphi(t)) + E \cos(\omega_n t - \varphi(t)), \\
y &= -B \sin(\omega_n t + \varphi(t)) + A \cos(\omega_n t + \varphi(t)) + \\
&+ E \sin(\omega_n t - \varphi(t)) - D \cos(\omega_n t - \varphi(t)),
\end{aligned} \tag{17}$$

или, исключая в (17) не входящую в (9) величину $\varphi(t)$, в виде

$$\begin{aligned}
x &= A \sin\left(\omega_n t + \int_0^t \Omega_z(\tau) d\tau\right) + B \cos\left(\omega_n t + \int_0^t \Omega_z(\tau) d\tau\right) + \\
&+ D \sin\left(\omega_n t - \int_0^t \Omega_z(\tau) d\tau\right) + E \cos\left(\omega_n t - \int_0^t \Omega_z(\tau) d\tau\right), \\
y &= -B \sin\left(\omega_n t + \int_0^t \Omega_z(\tau) d\tau\right) + A \cos\left(\omega_n t + \int_0^t \Omega_z(\tau) d\tau\right) + \\
&+ E \sin\left(\omega_n t - \int_0^t \Omega_z(\tau) d\tau\right) - D \cos\left(\omega_n t - \int_0^t \Omega_z(\tau) d\tau\right).
\end{aligned} \tag{18}$$

В частности, из уравнений (18) следует, что искомая величина $\Omega_z(t)$ входит в выражения для координат чувствительной массы только как подынтегральная функция, а непосредственно $\Omega_z(t)$ появляется только в производных от этих координат (скоростях чувствительной массы). Поэтому определить $\Omega_z(t)$ можно, составив комбинацию из координат $x(t)$, $y(t)$ и, обязательно, скоростей $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ чувствительной массы виброгироскопа.

Например, рассмотрим часто используемую в теории виброгироскопов величину [23]

$$H = x\dot{y} - y\dot{x}. \tag{19}$$

Подставляя в (19) уравнения (18), имеем

$$H = -(A^2 + B^2 + D^2 + E^2)\Omega_z + \omega_n(D^2 + E^2 - A^2 - B^2) + 2((AD - BE)\cos(2\omega_n t) - (BD + AE)\sin(2\omega_n t)), \quad (20)$$

откуда, учитывая равенство

$$x^2 + y^2 = A^2 + B^2 + D^2 + E^2 + 2((BE - AD)\cos(2\omega_n t) + (BD + AE)\sin(2\omega_n t)), \quad (21)$$

получаем $\Omega(t)$ в виде

$$\Omega_z(t) = -\frac{H + \omega_n * (A^2 + B^2 - D^2 - E^2)}{x^2 + y^2}, \quad (22)$$

где A, B, D и E определяются по начальным условиям

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(y(0) + \frac{\dot{x}(0) - \Omega_z(0)y(0)}{\omega_n} \right), & B &= \frac{1}{2} \left(x(0) - \frac{\dot{y}(0) + \Omega_z(0)x(0)}{\omega_n} \right), \\ D &= \frac{1}{2} \left(-y(0) + \frac{\dot{x}(0) - \Omega_z(0)y(0)}{\omega_n} \right), & E &= \frac{1}{2} \left(x(0) + \frac{\dot{y}(0) + \Omega_z(0)x(0)}{\omega_n} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$A^2 + B^2 - D^2 - E^2 = -\frac{\dot{y}(0)x(0) + \Omega_z(0)x^2(0)}{\omega_n}.$$

В частности, если в начальный момент времени или колебания происходят по направлению оси x ($\dot{y}(0) = 0$) и начальная угловая скорость равна нулю ($\Omega(0) = 0$), или начальное смещение по оси x равно нулю ($x(0) = 0$), то

$$A^2 + B^2 - D^2 - E^2 = 0$$

и

$$\Omega_z(t) = -\frac{H}{x^2 + y^2}. \quad (24)$$

Таким образом, удаётся найти общее решение однородной линейной нестационарной системы (9) в виде (18). Заметим, что это оказывается возможным благодаря существованию нестационарной замены переменных

$$\begin{aligned} x &= \cos \int_0^t \Omega(\tau) d\tau \xi + \sin \int_0^t \Omega(\tau) d\tau \eta, \\ y &= -\sin \int_0^t \Omega(\tau) d\tau \xi + \cos \int_0^t \Omega(\tau) d\tau \eta, \end{aligned} \quad (25)$$

приводящей систему (9) к стационарному виду.

Заметим, что собственные колебания чувствительной массы вибрационного гироскопа в связанной системе координат $Oxyz$ представляют собой комбинацию синусов и косинусов от суммы $\omega_n t + \int_0^t \Omega_z(\tau) d\tau$ и разности $\omega_n t - \int_0^t \Omega_z(\tau) d\tau$. Отсюда, в частности, следует устойчивость по Ляпунову тривиального решения

уравнений (2) при любом $\Omega_z(t)$ (но, конечно, таком, что выполнены условия теоремы существования и единственности решений для (9)) и невозможность параметрического по $\Omega_z(t)$ резонанса [1].

Соотношения (22), (24) показывают принципиальную возможность точного измерения виброгироскопом нестационарной угловой скорости в режиме собственных колебаний. Следует, однако, заметить, что указанная возможность пока носит теоретический характер, так как одной из целей активного управления вибрационным гироскопом является сведение H к нулю для уменьшения влияния погрешностей изготовления на точность виброгироскопа [9].

Из уравнений (18) также можно получить фундаментальную матрицу решений (9), что позволяет аналитически построить частные решения уравнений (9) при ненулевых правых частях.

5. Точность вибрационного микрогироскопа существенно зависит от его температуры. С методами соответствующих расчётов можно ознакомиться по [2, 4, 21].

6. Как указывалось выше, в идеальном случае равножесткого подвеса

$$k_{xx} = k_{yy} = k = \text{const}, \quad k_{xy} = 0, \quad (26)$$

однако добиться этого в процессе производства виброгироскопов очень трудно. Для компенсации неидеальности изготовления виброгироскопа (в частности, невыполнения условий (26)) к чувствительной массе прилагается специальная управляющая сила (подробнее об этом см. [7, 23]). Кроме того, возникает отдельная задача об идентификации параметров k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} .

К настоящему времени предложено несколько способов решения указанной задачи. В [7] предлагается идентифицировать параметры виброгироскопа (и, в частности, k_{xx} , k_{yy} , k_{xy}) на основе измерения различных составляющих управляющих сил, которые, в свою очередь, строятся по принципу обратной связи. В [22] параметры идентифицируются с помощью итерационной процедуры (сходимость которой, однако, не доказана). В [19] предлагается метод, основанный на статистическом анализе собственных колебаний чувствительной массы. Ниже рассматривается альтернативный способ идентификации коэффициентов жесткости подвеса виброгироскопа, связанный с измерением вынужденных колебаний чувствительной массы. Следует заметить, что аналогичный подход в более общей постановке применялся ранее в [8].

Если основание виброгироскопа неподвижно в инерциальном пространстве, а вязкое трение отсутствует, $r_x = r_y = 0$, уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k_{xx}}{m}x + \frac{k_{xy}}{m}y &= \frac{F_x}{m}, \\ \ddot{y} + \frac{k_{yy}}{m}y + \frac{k_{xy}}{m}x &= \frac{F_y}{m}. \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнения (27) — линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Если задать внешние вынуждающие силы F_x , F_y в виде гармонических с частотой ω , то в системе (27) возникнут вынужденные колебания

с той же частотой ω и амплитудами колебаний по x и y , зависящими от искомым коэффициентов жёсткости подвеса k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} .

Следует заметить, что особенностью одноосных интегрирующих виброгироскопов является их высокое качество [23] (в модели (27) трение вообще отсутствует). Таким образом, общее решение уравнений (27) при произвольных начальных условиях представляют собой сумму вынужденных и незатухающих собственных колебаний. Присутствие последних в общем решении приводит к погрешностям в измерении параметров вынужденных колебаний. Уменьшить указанные погрешности можно либо за счёт точного выбора начальных условий, соответствующих вынужденному решению, что на практике затруднительно, либо за счёт искусственного снижения качества системы (т. е. создания силы трения), в результате чего собственные колебания будут затухать с течением времени (скорость затухания определяется величиной трения), а изменение параметров вынужденного решения можно посчитать, если величина трения известна.

Будем строить внешние вынуждающие силы по закону

$$\begin{aligned}\frac{F_x}{m} &= -\varepsilon\dot{x} + f \sin \omega t, \\ \frac{F_y}{m} &= -\varepsilon\dot{y} + f \sin \omega t,\end{aligned}\tag{28}$$

постоянные величины $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$ и $f > 0$ считаются известными. Тогда все решения системы (27), (28) асимптотически стремятся к

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \\ y(t) &= C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t,\end{aligned}\tag{29}$$

где C_1 , C_2 , C_3 , C_4 являются функциями от k_{xx}/m , k_{yy}/m , k_{xy}/m , ω , ε , f . Скорость затухания собственных колебаний определяется величиной ε (за время $T = 2/\varepsilon$ с амплитуда собственных колебаний по каждой из осей Ox , Oy уменьшается в e раз).

На плоскости Oxy траектория колебаний чувствительной массы виброгироскопа (29) представляет собой эллипс, параметры которого (длины большой a и малой b полуосей, а также угол φ между большой полуосью эллипса и осью Ox) определяются величинами k_{xx}/m , k_{yy}/m , k_{xy}/m , ω , ε , f . Поэтому соотношения (29) можно представить в виде [17]

$$\begin{aligned}x(t) &= a \cos(\omega t + \vartheta_0) \cos \varphi - b \sin(\omega t + \vartheta_0) \sin \varphi, \\ y(t) &= a \cos(\omega t + \vartheta_0) \sin \varphi + b \sin(\omega t + \vartheta_0) \cos \varphi,\end{aligned}\tag{30}$$

$\vartheta_0 = \text{const}$.

Определим энергию колебаний E и кинетический момент H ,

$$E = \frac{\omega^2(x^2 + y^2) + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2}, \quad H = x\dot{y} - y\dot{x},\tag{31}$$

через которые можно выразить a , b и φ [17]:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\sqrt{E + \sqrt{E^2 - \omega^2 H^2}}}{\omega}, \\
b &= \frac{\sqrt{E - \sqrt{E^2 - \omega^2 H^2}}}{\omega}, \\
\sin 2\varphi &= \frac{\omega^2 xy + \dot{x}\dot{y}}{\sqrt{E^2 - \omega^2 H^2}}, \\
\cos 2\varphi &= \frac{\omega^2(x^2 - y^2) + \dot{x}^2 - \dot{y}^2}{2\sqrt{E^2 - \omega^2 H^2}}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Величины a , b и φ асимптотически стремятся к установившимся значениям.

Как указывалось выше, конструкция вибрационного гироскопа позволяет получать информацию о текущих значениях x , y , \dot{x} , \dot{y} и, соответственно, вычислять текущие значения E и H . Тогда по формулам (32) можно вычислить a , b и φ . Получим соотношения между искомыми величинами k_{xx}/m , k_{yy}/m , k_{xy}/m , известными ω , ε , f и измеренными a , b , φ . Для этого подставим в уравнения (27), (28) выражения (30), которые являются частным решением вышеуказанных уравнений. Последние примут вид

$$\begin{aligned}
&\left(-\omega^2 a \cos \varphi - \varepsilon \omega b \sin \varphi + \frac{k_{xx}}{m} a \cos \varphi + \frac{k_{xy}}{m} a \sin \varphi\right) \cos(\omega t + \vartheta_0) + \\
&\quad + \left(\omega^2 b \sin \varphi - \varepsilon \omega a \cos \varphi - \frac{k_{xx}}{m} b \sin \varphi + \frac{k_{xy}}{m} b \cos \varphi\right) \sin(\omega t + \vartheta_0) = f \sin \omega t, \\
&\left(-\omega^2 a \sin \varphi + \varepsilon \omega b \cos \varphi + \frac{k_{yy}}{m} a \sin \varphi + \frac{k_{xy}}{m} a \cos \varphi\right) \cos(\omega t + \vartheta_0) + \\
&\quad + \left(-\omega^2 b \cos \varphi - \varepsilon \omega a \sin \varphi + \frac{k_{yy}}{m} b \cos \varphi - \frac{k_{xy}}{m} b \sin \varphi\right) \sin(\omega t + \vartheta_0) = f \sin \omega t.
\end{aligned} \tag{33}$$

Уравнения (33) должны выполняться в любой момент времени. Поэтому в силу линейной независимости функций \sin и \cos получаем

$$\begin{aligned}
-\omega^2 a \cos \varphi - \varepsilon \omega b \sin \varphi + \frac{k_{xx}}{m} a \cos \varphi + \frac{k_{xy}}{m} a \sin \varphi &= -f \sin \vartheta_0, \\
\omega^2 b \sin \varphi - \varepsilon \omega a \cos \varphi - \frac{k_{xx}}{m} b \sin \varphi + \frac{k_{xy}}{m} b \cos \varphi &= f \cos \vartheta_0, \\
-\omega^2 a \sin \varphi + \varepsilon \omega b \cos \varphi + \frac{k_{yy}}{m} a \sin \varphi + \frac{k_{xy}}{m} a \cos \varphi &= -f \sin \vartheta_0, \\
-\omega^2 b \cos \varphi - \varepsilon \omega a \sin \varphi + \frac{k_{yy}}{m} b \cos \varphi - \frac{k_{xy}}{m} b \sin \varphi &= f \cos \vartheta_0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Уравнения (34) линейны по неизвестным k_{xx}/m , k_{yy}/m , k_{xy}/m , но нелинейны по ϑ_0 . Исключить последнюю можно, переходя к следствию из уравнений (34):

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 a \cos \varphi - \varepsilon \omega b \sin \varphi + \frac{k_{xx}}{m} a \cos \varphi + \frac{k_{xy}}{m} a \sin \varphi = \\
 & = -\omega^2 a \sin \varphi + \varepsilon \omega b \cos \varphi + \frac{k_{yy}}{m} a \sin \varphi + \frac{k_{xy}}{m} a \cos \varphi, \\
 & \omega^2 b \sin \varphi - \varepsilon \omega a \cos \varphi - \frac{k_{xx}}{m} b \sin \varphi + \frac{k_{xy}}{m} b \cos \varphi = \\
 & = -\omega^2 b \cos \varphi - \varepsilon \omega a \sin \varphi + \frac{k_{yy}}{m} b \cos \varphi - \frac{k_{xy}}{m} b \sin \varphi, \\
 & \left(-\omega^2 a \cos \varphi - \varepsilon \omega b \sin \varphi + \frac{k_{xx}}{m} a \cos \varphi + \frac{k_{xy}}{m} a \sin \varphi \right)^2 + \\
 & + \left(\omega^2 b \sin \varphi - \varepsilon \omega a \cos \varphi - \frac{k_{xx}}{m} b \sin \varphi + \frac{k_{xy}}{m} b \cos \varphi \right)^2 = f^2.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Из первых двух уравнений системы (35) выразим k_{xx}/m и k_{yy}/m через k_{xy}/m . Найденные таким образом соотношения

$$\begin{aligned}
 \frac{k_{xx}}{m} &= \frac{k_{xy}}{m} + \omega^2 + \frac{\varepsilon \omega}{2ab} (a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)), \\
 \frac{k_{yy}}{m} &= \frac{k_{xy}}{m} + \omega^2 - \frac{\varepsilon \omega}{2ab} (a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi))
 \end{aligned} \tag{36}$$

подставим в третье уравнение системы (35). Получим квадратное относительно k_{xy}/m уравнение

$$\begin{aligned}
 & (a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \sin 2\varphi) \left(\frac{k_{xy}}{m} \right)^2 + \left(ab - \frac{a^4 + b^4}{2ab} \right) \varepsilon \omega \sin 4\varphi \frac{k_{xy}}{m} + \\
 & + \frac{\varepsilon^2 \omega^2}{16a^2 b^2} (2(a^2 + b^2)^3 + 8a^2 b^2 (a^2 + b^2) - 2(a^2 - b^2)^2 (a^2 + b^2) \cos 4\varphi - \\
 & - (a^2 - b^2)(3(a^2 + b^2)^2 + 4a^2 b^2) \sin 2\varphi + (a^2 - b^2)^3 \sin 6\varphi) - f^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{37}$$

Таким образом, из уравнений (36), (37) можно найти k_{xx}/m , k_{yy}/m , k_{xy}/m при известных ω , ε , a , b , φ .

Во многих случаях вместо величин k_{xx}/m и k_{yy}/m нужно знать «номинальную собственную частоту» и «неравножесткость» [19]:

$$\omega_n^2 = \frac{k_{xx} + k_{yy}}{2m}, \quad h = \frac{k_{xx} - k_{yy}}{2m}. \tag{38}$$

Используя соотношения (36) и (38), получаем

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{\varepsilon \omega}{2ab} (a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \sin 2\varphi), \\
 \frac{k_{xy}}{m} &= \omega_n^2 - \omega^2 + \frac{\varepsilon \omega}{2ab} (a^2 - b^2) \cos 2\varphi.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Подстановка выражений (38), (39) в третье уравнение системы (35) приводит к квадратному относительно $\omega_n^2 - \omega^2$ уравнению

$$(a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \sin 2\varphi)(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \frac{(a^4 - b^4)\varepsilon\omega \cos 2\varphi}{ab}(\omega_n^2 - \omega^2) + \frac{(a^2 + b^2)^2 \varepsilon^2 \omega^2 (a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \sin 2\varphi)}{4a^2 b^2} - f^2 = 0. \quad (40)$$

Заметим, что, во-первых, при решении квадратного уравнения (40) получаются, вообще говоря, два различных решения ω_n^2 и, соответственно, два различных k_{xy}/m . Нужно провести по крайней мере два испытания (с разными значениями ω) и выбрать повторяющееся ω_n^2 . Во-вторых, из соотношения (39) следует, что $h \geq 0$, т. е. $k_{xx}/m \geq k_{yy}/m$. Если реальное h меньше 0, т. е. $k_{xx}/m < k_{yy}/m$, то реальные значения k_{xx}/m , k_{yy}/m , k_{xy}/m не удовлетворяют равенствам (34).

По-видимому, указанные особенности связаны с тем, что параметризация (30) траектории колебаний чувствительной массы виброгироскопа на плоскости Oxy не единственная. Наряду с ней можно ввести «симметричные» к (30) соотношения

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\omega t + \vartheta_0) \sin \varphi + b \sin(\omega t + \vartheta_0) \cos \varphi, \\ y(t) &= a \cos(\omega t + \vartheta_0) \cos \varphi - b \sin(\omega t + \vartheta_0) \sin \varphi, \end{aligned} \quad (41)$$

$\vartheta_0 = \text{const}$. Из соотношений, аналогичных (31), (32), находим a , b и φ . Подставляя в уравнения (27), (28) выражения (41), получаем

$$\begin{aligned} -\omega^2 a \sin \varphi + \varepsilon \omega b \cos \varphi + \frac{k_{xx}}{m} a \sin \varphi + \frac{k_{xy}}{m} a \cos \varphi &= -f \sin \vartheta_0, \\ -\omega^2 b \cos \varphi - \varepsilon \omega a \sin \varphi + \frac{k_{xx}}{m} b \cos \varphi - \frac{k_{xy}}{m} b \sin \varphi &= f \cos \vartheta_0, \\ -\omega^2 a \cos \varphi - \varepsilon \omega b \sin \varphi + \frac{k_{yy}}{m} a \cos \varphi + \frac{k_{xy}}{m} a \sin \varphi &= -f \sin \vartheta_0, \\ \omega^2 b \sin \varphi - \varepsilon \omega a \cos \varphi - \frac{k_{yy}}{m} b \sin \varphi + \frac{k_{xy}}{m} b \cos \varphi &= f \cos \vartheta_0. \end{aligned} \quad (42)$$

Исключая переменную ϑ_0 и выполнив замену (38), получаем аналогичные (39) соотношения

$$\begin{aligned} h &= -\frac{\varepsilon \omega}{2ab} (a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \sin 2\varphi), \\ \frac{k_{xy}}{m} &= \omega_n^2 - \omega^2 + \frac{\varepsilon \omega}{2ab} (a^2 - b^2) \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (43)$$

для разности $\omega_n^2 - \omega^2$ выполняется, как и ранее, уравнение (40).

Заметим, что из соотношения (43) следует $h \leq 0$, т. е. $k_{xx}/m \leq k_{yy}/m$. Если реальное h больше 0, т. е. $k_{xx}/m > k_{yy}/m$, то реальные значения k_{xx}/m , k_{yy}/m , k_{xy}/m не удовлетворяют равенствам (43).

Таким образом, можно предложить следующую методику для идентификации параметров k_{xx}/m , k_{yy}/m , k_{xy}/m .

1. Выбираем величину $\varepsilon > 0$, входящую в уравнения (39), (40), (43) и определяющую затухание собственных колебаний чувствительной массы виброгироскопа.

2. Вводим чувствительную массу виброгироскопа в режим вынужденных колебаний, формируя вынуждающие силы по закону (28).
3. Находим (в соответствии с (31), (32)) установившиеся значения E, H, a, b, φ . При этом разница между движениями (30) и (41) следующая: величины E, a, b одни и те же, значения H одинаковы по абсолютной величине и имеют разный знак, величины φ в сумме дают $\pi/2$.
4. В соответствии с формулами (39), (40), (43) вычисляем четыре тройки $h, k_{xy}/m, \omega_n^2$.
5. Повторяем пункты 1–4, получаем ещё четыре тройки $h, k_{xy}/m, \omega_n^2$.
6. Повторившаяся в обоих испытаниях тройка $h, k_{xy}/m, \omega_n^2$ является решением.
7. Определяем величины $k_{xx}/m, k_{yy}/m$ по формулам (38).

7. Численный эксперимент. Численный эксперимент проводился в среде Matlab 6.1. Использовались следующие значения параметров, входящих в уравнения (27), (28): $f = 1, \varepsilon = 2$, начальные значения переменных нулевые, т. е. решение не совпадает с вынужденными колебаниями. Измерения проводились через 30 периодов вынужденных колебаний, шум в измерениях отсутствовал.

В первом случае идентифицировалась система с $h = 0,5, \omega_n^2 = 10,45, k_{xy}/m = 0,5$. Вынужденные колебания имели частоту ω , равную 3 и 4 рад/с. В соответствии с формулами (39), (40), (43) были получены следующие результаты.

ω	h	ω_n^2	k_{xy}/m
3	0,5	8,5064	-1,4436
3	0,5	10,45	0,5
3	-0,5	7,55	-0,5
3	-0,5	9,4936	1,4436

ω	h	ω_n^2	k_{xy}/m
4	0,5	10,45	0,5
4	0,5	15,485	5,535
4	-0,5	16,515	-5,535
4	-0,5	21,55	-0,5

Одна и та же идентифицированная тройка $h = 0,5, \omega_n^2 = 10,45, k_{xy}/m = 0,5$ присутствует в обоих испытаниях и совпадает с искомыми значениями.

Во втором случае идентифицировалась система с $h = -0,5, \omega_n^2 = 10,45, k_{xy}/m = 0,5$. Как и ранее, вынужденные колебания имели частоту 3 и 4 рад/с. В соответствии с формулами (39), (40), (43) были получены следующие результаты.

ω	h	ω_n^2	k_{xy}/m
3	0,5	7,55	-0,5
3	0,5	9,4636	1,4436
3	-0,5	8,5064	-1,4436
3	-0,5	10,45	0,5

ω	h	ω_n^2	k_{xy}/m
4	0,5	16,515	-5,535
4	0,5	21,55	-0,5
4	-0,5	10,45	0,5
4	-0,5	15,485	5,535

Как и предыдущем примере, одна и та же идентифицированная тройка $h = -0,5$, $\omega_n^2 = 10,45$, $k_{xy}/m = 0,5$ присутствует в обоих испытаниях и совпадает с искомыми значениями.

Конечно, использованные в численном примере значения параметров — модельные. На практике величина ω_n порядка 10000 Гц. В этом случае для повышения точности вычислений лучше перейти к безразмерному времени $\tau = \omega t$ или $\tau = \omega_n t$, соответственно изменятся некоторые коэффициенты в (27)—(43).

Кроме того, в любой реальной системе измерения всегда выполняются с ошибками. В результате величины a , b и φ будут отличаться от своих «идеальных» значений, что приведёт к неточному определению h , k_{xy}/m , ω_n^2 по формулам (38)—(40), (43) или даже отсутствию решения уравнения (40). В этом случае при отсутствии систематической погрешности в измерениях можно использовать в формулах (38)—(40), (43) средние значения a , b и φ .

Таким образом, при наличии точной информации об установившемся режиме вынужденных колебаний чувствительной массы виброгироскопа возможна идентификация параметров жёсткости подвеса на основании двух серий измерений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 04-01-00379 и 05-08-50148а).

Литература

- [1] Александров В. В., Болтянский В. Г. и др. Оптимизация динамики управляемых систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.
- [2] Барулина М. А., Джашитов В. Э., Панкратов В. М. Математические модели систем терморегулирования микромеханических гироскопов // Гироскопия и навигация. — 2002. — № 3 (37). — С. 48—59.
- [3] Бугров Д. И., Трусов А. А. О собственных колебаниях одноосного вибрационного гироскопа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2004. — № 4. — С. 65—66.
- [4] Джашитов В. Э., Лестев А. М., Панкратов В. М., Попова И. В. Влияние температурных и технологических факторов на точность микромеханических гироскопов // Гироскопия и навигация. — 1999. — № 3 (26). — С. 3—16.
- [5] Евстифеев М. И. Погрешности микромеханического гироскопа на вибрирующем основании // Гироскопия и навигация. — 2002. — № 2 (37). — С. 19—25.
- [6] Журавлёв В. Ф. Теоретические основы волнового твёрдотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. — 1993. — № 3. — С. 6—19.
- [7] Журавлев В. Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 6. — С. 27—35.
- [8] Журавлёв В. Ф. Задача идентификации погрешностей обобщённого маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. — 2000. — № 5. — С. 186—192.
- [9] Журавлёв В. Ф. Обобщённый маятник Фуко в режиме управления углом прецессии // Изв. РАН. МТТ. — 2002. — № 5. — С. 3—7.

- [10] Збруцкий А. В., Апостолук В. А. Динамика чувствительного элемента микромеханического гироскопа с дополнительной рамкой // Гироскопия и навигация. — 1998. — № 3 (22). — С. 13—23.
- [11] Кучерков С. Г. Использование интегрирующих свойств вибрационного микромеханического гироскопа с резонансной настройкой при построении датчика угловой скорости компенсационного типа // Гироскопия и навигация. — 2002. — № 2 (37). — С. 12—18.
- [12] Лестев А. М., Попова И. В., Пятышев Е. Н., Лурье М. С., Семёнов А. А., Евстифеев М. И. Разработка и исследование микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. — 1999. — № 2 (25). — С. 3—10.
- [13] Морозов В. М. Линейные нестационарные приводимые системы и их приложение к задачам механики управляемых систем: Дис... докт. физ.-мат. наук. — М., 1989.
- [14] Пешехонов В. Г. Гироскопы начала XXI века // Четвёртый международный аэрокосмический конгресс IAC'2003. Сборник тезисов. 18—23 августа 2003 г., Москва, Россия. — С. 466—467.
- [15] Barnaby R. E., Chatterton J. B. General theory and operational characteristics of the gyrotrom angular rate tachometer // Aeronautical Eng. Review. — 1953. — Vol. 12, no. 11. — P. 31—36.
- [16] Foucault J. B. L. Demonstration physique au mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1851. — Vol. 32. — P. 135—138.
- [17] Friedland B., Hutton M. Theory and error analysis of vibrating-member gyroscope // IEEE Trans. Autom. Contr. — 1978. — Vol. 23, no. 4. — P. 545—556.
- [18] Netzer E., Porat I. A novel vibratory device for angular rate measurement // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. — 1995. — Vol. 117. — P. 585—591.
- [19] Painter C., Shkel A. Identification of anisoelectricity for electrostatic «trimming» of rate integrating gyroscopes // Proc. SPIE. — 2002. — No. 4700. — P. 157—168.
- [20] Painter C., Shkel A. Active structural error suppression in MEMS vibratory rate integrating gyroscopes // IEEE Sensors J. — 2003. — Vol. 3, no. 5. — P. 595—606.
- [21] Painter C., Shkel A. Structural and thermal modeling of a z-axis rate integrating gyroscope // J. Micromech. Microeng. — 2003. — Vol. 13. — P. 229—237.
- [22] Phani A., Seshia A. Identification of anisoelectricity and nonproportional damping in MEMS gyroscopes // NSTI-Nanotech. — 2004. — Vol. 2. — P. 343—346.
- [23] Shkel A., Horowitz R., Seshia A., Park S., Howe R. Dynamics and control of micro-machined gyroscopes // The Amer. Cont. Conf. (San Diego, CA). — 1999. — Vol. 3. — P. 2119—2124.
- [24] Shkel A., Lui J., Ikei C., Zeng F.-G. Feasibility study on a prototype of vestibular implant using MEMS gyroscopes // IEEE Int. Conf. on Sensors, Orlando, FL, USA, June 2002. — Paper 55.1. — P. 1526—1531.
- [25] www.analogdevices.com.

